Усеченные янгианы

Дмитрий Голубенко[1]

29 апреля 2021

Напомню, что сдвинутый янгиан $Y_n(\sigma)$ строится по матрице сдвигов $\sigma = (s_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, элементы которой — неотрицательные целые, удовлетворяющие соотнощениям

$$s_{i,j} + s_{j,k} = s_{i,k}$$

Сдвинутый янгиан $Y_n(\sigma)$ можно породить элементами вида

$$\{D^{(r)}_{a;i,j} \colon 1 \le a \le m, 1 \le i,j \le \nu_a, r > 0\},$$
$$\{E^{(r)}_{a;i,j} \colon 1 \le a < m, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_{a+1}, r > s_{a,a+1}(\nu)\},$$
$$\{F^{(r)}_{a;i,j} \colon 1 \le a < m, 1 \le i \le \nu_{a+1}, 1 \le j \le \nu_a, r > s_{a+1,a}(\nu)\}$$

и соответствующими соотношениями.

Напомним также, что разбиение $\nu = (\nu_1, \dots \nu_m)$ числа n допустимо, если $s_{i,j} = 0$ для всех $\nu_1 + \dots \nu_{a-1} + 1 \leq i, j \leq \nu_1 + \dots \nu_a$.
Теперь определим *уровень* $l \geq s_{1,n} + s_{n,1}$ и для всех $i = 1, \dots, n$ определим

$$p_i := l - s_{i,n} - s_{n,i},$$

Тем самым мы получим последовательность $(p_1, \dots, p_n)$, где $0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n = l$. Краткости ради будем писать $p_a(\nu) := p_{\nu_1 + \dots + \nu_a}$.
Заметим сразу же, что

$$p_a(\nu) - p_{a-1}(\nu) = (s_{\nu_1+\dots+\nu_{a-1},n} - s_{\nu_1+\dots+\nu_a,n}) + (s_{n,\nu_1+\dots+\nu_{a-1}} - s_{n,\nu_1+\dots+\nu_a}$$

Definition

Сдвинутый янгиан уровня l определяется как

$$Y_{n,l}(\sigma) = Y_n(\sigma)/\langle\{D_1^{(r)} \colon r > p_1\}\rangle$$

Соответствующий двусторонний идеал можно также породить элементами
$$\{D_{1;i,j}^{(r)}\colon 1 \le i,j \le \nu_1, r > p_1\}.$$
В самом деле, по определению имеем $D_{1;1,1}^{(r)} = D_1^{(r)}$, а все остальные $D_{1;i,j}^{(r)}$ можно получить с помощью соотношения
$$[D_{a;i,j}^{(r)}, D_{b;h,k}^{(s)}] = \delta_{a,b} \sum_{t=0}^{\min(r,s)-1} \left(D_{a;i,k}^{(r+s-1-t)} D_{a;h,j}^{(t)} - D_{a;i,k}^{(t)} D_{a;h,j}^{(r+s-1-t)}\right)$$
из элементов вида $\{D_{1;1,1}^{(r)}\}_{r>p_1}$: для $i,j \ne 1$
$$[D_{1;1,1}^{(r)}, D_{1;1,j}^{(1)}] = D_{1;1,j}^{(r)} D_{1;1,1}^{(0)} - D_{a;1,j}^{(0)} D_{a;1,1}^{(r)} = D_{1;1,j}^{(r)},$$
$$[D_{1;1,1}^{(r)}, D_{1;i,1}^{(1)}] = D_{1;1,1}^{(r)} D_{1;i,1}^{(0)} - D_{1;1,1}^{(0)} D_{1;i,1}^{(r)} = -D_{1;i,1}^{(r)}$$
а для $i \ne j$
$$[D_{1;1,j}^{(r)}, D_{1;i,1}^{(0)}] = D_{1;1,1}^{(r)} D_{1;i,j}^{(0)} - D_{1;1,1}^{(0)} D_{1;i,j}^{(r)} = -D_{1;i,j}^{(r)}$$

Фильтрацию $\mathrm{F}_0 Y_{n,l}(\sigma) \subseteq \mathrm{F}_1 Y_{n,l}(\sigma) \subseteq \cdots$ of $Y_{n,l}(\sigma)$ на свдинутом янгиане мы зададим, объявив для любой допустимой формы $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ все элементы вида $D^{(r)}_{a;i,j}, E^{(r)}_{a,b;i,j}$ и $F^{(r)}_{a,b;i,j}$ степени r, а $\mathrm{F}_d Y_{n,l}(\sigma)$ в таком случае будет линейной оболочкой элементов степени не более d. Для $1 \leq a, b \leq m, 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_b$ и $r > s_{a,b}(\nu)$ определим

$$e^{(r)}_{a,b;i,j} := \begin{cases} \mathrm{gr}_r D^{(r)}_{a;i,j} & \text{if } a = b, \\ \mathrm{gr}_r E^{(r)}_{a,b;i,j} & \text{if } a < b, \\ \mathrm{gr}_r F^{(r)}_{b,a;i,j} & \text{if } a > b, \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку $\mathrm{gr}\, Y_{n,l}(\sigma)$ является фактором $\mathrm{gr}\, Y_n(\sigma)$, то она коммутативна и порождается элементами вида $\{e^{(r)}_{a,b;i,j}\}_{1 \leq a,b \leq m, 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_b, r > s_{a,b}(\nu)}$.

Lemma

Для любой допустимой формы $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ *алгебра* $\mathrm{gr}\, Y_{n,l}(\sigma)$ *может быть порождена элементами*

$$\{e^{(r)}_{a,b;i,j} \colon 1 \le a, b \le m, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_b, \\ s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_{\min(a,b)}(\nu)\}.$$

Будем доказывать индукцией по «количеству блоков в левом верхнем угле». Формально говоря, для некоторого $1 \leq c \leq m$ определим $\widehat{\Omega}_c$ как множество элементов

$$
\begin{aligned}
&\{D_{a;i,j}^{(r)} \colon 1 \leq a \leq c, 1 \leq i, j \leq \nu_a, r > 0\} \\
\cup&\{E_{a,b;i,j}^{(r)} \colon 1 \leq a < b \leq c, 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_b, r > s_{a,b}(\nu)\} \\
\cup&\{F_{a,b;i,j}^{(r)} \colon 1 \leq a < b \leq c, 1 \leq j \leq \nu_a, 1 \leq i \leq \nu_b, r > s_{b,a}(\nu)\}.
\end{aligned}
$$

Покажем, что эти элементы можно породить с помощью множества Ω_c, равного

$$
\begin{aligned}
&\{D^{(r)}_{a;i,j} \colon 1 \le a \le c, 1 \le i,j \le \nu_a, 0 < r \le p_a(\nu)\} \\
\cup&\{E^{(r)}_{a,b;i,j} \colon 1 \le a < b \le c, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_b, \\
&s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_a(\nu)\} \\
\cup&\{F^{(r)}_{a,b;i,j} \colon 1 \le a < b \le c, 1 \le j \le \nu_a, 1 \le i \le \nu_b, \\
&s_{b,a}(\nu) < r \le s_{b,a}(\nu) + p_a(\nu)\}.
\end{aligned}
$$

Для $c = 1$ имеем $D^{(r)}_{1;i,j} = 0$ для $r > p_1(\nu)$, поскольку $Y_{n,l}(\sigma)$ получается как фактор по идеалу, порожденному такими элементами. База установлена.

Теперь докажем шаг индукции. Сначала разберемся с E, с F ситуация будет симметричной. Для $1 \leq a < c-1$ по определению имеем

$$E_{a,c;i,j}^{(r)} = [E_{a,c-1;i,k}^{(r-s_{c-1,c}(\nu))}, E_{c-1;k,j}^{(s_{c-1,c}(\nu)+1)}]$$

для некоторого $1 \leq k \leq \nu_{c-1}$. По предположению $E_{a,c-1;i,k}^{(r-s_{c-1,c}(\nu))}$ — линейная комбинация мономов степени $(r - s_{c-1,c}(\nu))$ от элементов Ω_{c-1}. Заметим, что коммутатор подобного монома с $E_{c-1;k,j}^{(s_{c-1,c}(\nu)+1)}$ — линейная комбинация мономов степени r от элементов Ω_c: воспользуемся формулой Лейбница — получаем

$$[X_1 \dots X_m, E_{c-1;k,j}^{(s_{c-1,c}(\nu)+1)}] = \sum X_1 \dots X_{p-1}[X_p, E_{c-1;k,j}^{(s_{c-1,c}(\nu)+1)}]X_{p+1} \dots X_m,$$

где $X_p \in \Omega_{c-1}$.

Проверим, что сумма степеней всех мономов одинакова и равна r — отсюда будет следовать, что $E^{(r)}_{a,c;i,j}$ — линейная комбинация мономов степени r от элементов Ω_c. Для этого рассмотрим различные случаи. Пусть $X_p = E^{(r)}_{a,b,h,k}$. Если $|b-c| > 1$ и $k \neq i$, то X_p коммутирует с $E^{(s_{c-1,c}(\nu)+1)}_{c-1,i,j}$, так что достаточно рассмотреть случай $b = c-1$ и $k = i$. Тогда

$$[E^{(r)}_{a,c-1,h,i}, E^{(s_{c-1,c}(\nu)+1)}_{c-1,i,j}] = E^{(r+s_{c-1,c}(\nu))}_{a,c,h,i}$$

Заметим, что $r < s_{a,c-1}(\nu) + p_{c-1}(\nu)$, то

$$r + s_{c-1,c}(\nu) < s_{a,c}(\nu) + p_{c-1}(\nu) \leq s_{a,c-1}(\nu) + p_c(\nu)$$

Если $X_p = D^{(r)}_{a,h,k}$, то согласно соотношению

$$[D^{(r)}_{a;i,j}, E^{(s)}_{b;h,k}] = \delta_{a,b} \sum_{t=0}^{r-1} \sum_{g=1}^{\nu_a} D^{(t)}_{a;i,g} E^{(r+s-1-t)}_{a;g,k} \delta_{h,j} - \delta_{a,b+1} \sum_{t=0}^{r-1} D^{(t)}_{b+1;i,k} E^{(r+s-1-t)}_{b;h,j}$$

можно выразить коммутатор как многочлен от элементов Ω_c. Степень E равна $s_{c-1,c}(\nu) + 1 + (r-1) - t$ и находится в интервале от $s_{c-1,c}(\nu) + r$ до $s_{c-1,c}(\nu) + 1$.

Если X это один из $F^{(r)}_{a,b,h,k}$, то согласно соотношению

$$[E^{(r)}_{a;i,j}, F^{(s)}_{b;h,k}] = \delta_{a,b} \sum_{t=0}^{r+s-1} \widetilde{D}^{(r+s-1-t)}_{a;i,k} D^{(t)}_{a+1;h,j}$$

можно выразить коммутатор как многочлен от элементов Ω_c. Те же неравенства на степени выполнены.

Далее

$$E^{(r)}_{c-1;i,j} = [D^{(r-s_{c-1,c}(\nu))}_{c-1;i,i}, E^{(s_{c-1,c}(\nu)+1)}_{c-1;i,j}] - \sum_{t=1}^{r-s_{c-1,c}(\nu)-1} \sum_{h=1}^{\nu_{c-1}} D^{(t)}_{c-1;i,h} E^{(r-t)}_{c-1;h,j}.$$

По индукции $D^{(r-s_{c-1,c}(\nu))}_{c-1;i,i}$ — линейная комбинация мономов степени $(r - s_{c-1,c}(\nu))$ от элементов Ω_{c-1}. Пользуемся формулой Лебйница и получаем, что коммутатор представляется как линейная комбинация мономов степени r от

$$\Omega_{c-1} \cup \{E^{(r)}_{a,c;i,j} \colon 1 \leq a < c, 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_c, s_{a,c}(\nu) < r \leq s_{a,c}(\nu) + p_a$$

Теперь индукцией по r получаем, что каждый $E^{(r)}_{c-1;i,j}$ представим как линейная комбинация мономов степени r от Ω_c. Аргумент для $F^{(r)}_{c-1;i,j}$ доказывается аналогично, только используется соотношение

$$F^{(r)}_{c-1;i,j} = [F^{(s_{c,c-1}(\nu)+1)}_{c-1;i,j}, D^{(r-s_{c,c-1}(\nu))}_{c-1;j,j}] - \sum_{t=1}^{r-s_{c,c-1}(\nu)-1} \sum_{h=1}^{\nu_{c-1}} F^{(r-t)}_{c-1;i,h} D^{(t)}_{c-1;h,j}$$

Теперь рассмотрим элементы вида $D_{c;i,j}^{(r)}$. В силу соотношений имеем для $1 \le k \le \nu_{c-1}$

$$D_{c;i,j}^{(r)} = \sum_{t=0}^{r-1} \widetilde{D}_{c-1;k,k}^{(r-t)} D_{c;i,j}^{(t)} - [E_{c-1;k,j}^{(r-s_{c,c-1}(\nu))}, F_{c-1;i,k}^{(s_{c,c-1}(\nu)+1)}].$$

Мы уже выяснили, что $E_{c-1;k,j}^{(r-s_{c,c-1}(\nu))}$ — линейная комбинация мономов степени $(r - s_{c,c-1}(\nu))$ от переменных

$$\Omega_{c-1} \cup \{E_{a,c;i,j}^{(r)} : 1 \le a < c, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_c, s_{a,c}(\nu) < r \le s_{a,c}(\nu) + p_a$$

Пользуясь правилом Лейбница и соотношениями, получаем, что коммутатор в правой части — линейная комбинация мономов степени r от элементов Ω_c. То есть по индукции получаем, что $D_{c;i,j}^{(r)}$ представим как линейная комбинация мономов степени r от Ω_c.

Пусть t — размер последнего блока нулей в σ, то есть максимальное число, что $s_{i,j} = 0$ для $n - t + 1 \leq i, j \leq n$. Если либо $t = n$, либо $s_{n-t,n-t+1} \neq 0$, то коумножение Δ_R может быть пропущено через фактор по идеалу:

$$\Delta_R \colon Y_{n,l}(\sigma) \to Y_{n,l-1}(\dot{\sigma}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t),$$

Аналогично, если $t = n$ или $s_{n-t+1,n-t} \neq 0$, коумножение Δ_L также пропускается через фактор:

$$\Delta_L \colon Y_{n,l}(\sigma) \to U(\mathfrak{gl}_t) \otimes Y_{n,l-1}(\dot{\sigma}),$$

По определению отображения Δ_R и Δ_L сохраняют фильтрацию, так что можно рассмотреть соответствующие отображения градуированных алгебр

$$\mathrm{gr}\Delta_R \colon \mathrm{gr}\, Y_{n,l}(\sigma) \to \mathrm{gr}(Y_{n,l-1}(\dot{\sigma}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)),$$
$$\mathrm{gr}\Delta_L \colon \mathrm{gr}\, Y_{n,l}(\sigma) \to \mathrm{gr}(U(\mathfrak{gl}_t) \otimes Y_{n,l-1}(\dot{\sigma}))$$

Theorem

Для любой допустимой формы $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ *алгебра* $\mathrm{gr}\, Y_{n,l}(\sigma)$ — *свободная коммутативная алгебра на порождающих*

$$\{e^{(r)}_{a,b;i,j} \colon 1 \le a, b \le m, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_b,$$
$$s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_{\min(a,b)}(\nu)\}.$$

а отображения Δ_R, Δ_L, $\mathrm{gr}\Delta_R$ *и* $\mathrm{gr}\Delta_L$, *определенные выше, инъективны.*

Индукция по l. База при $l = 0$ очевидно верна. Теперь докажем шаг. Для этого достаточно проверить (в силу леммы выше), что утверждение верно для минимального допустимого $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ для матрицы σ. Хотя бы одно из отображений Δ_R или Δ_L будет определено, будем считать, что это Δ_R, доказательство для Δ_L аналогично и получается применением анти-изоморфизма τ. Определим новые элементы алгебры $\mathrm{gr}(Y_{n,l-1}(\dot\sigma) \otimes U(\mathfrak{gl}_t))$:

$$\dot e^{(r)}_{a,b;i,j} = \begin{cases} \mathrm{gr}_r \dot D^{(r)}_{a;i,j} \otimes 1 & \text{if } a = b, \\ \mathrm{gr}_r \dot E^{(r)}_{a,b;i,j} \otimes 1 & \text{if } a < b, \\ \mathrm{gr}_r \dot F^{(r)}_{a,b;i,j} \otimes 1 & \text{if } a > b. \end{cases}$$

и для $1 \le i, j \le t$ положим $x_{i,j} := \mathrm{gr}_1 1 \otimes e_{i,j}$. Также положим $\dot e^{(0)}_{m,m;i,j} := \delta_{i,j}$.

Воспользуемся формулами $\Delta_R(e^{(r)}_{a,b;i,j})$ и найдем такие многочлены $f^{(r)}_{a;i,j}$ от переменных $\dot{e}^{(r)}_{a,b;i,j}$, что

$$\mathrm{gr}\Delta_R\left(e^{(r)}_{a,b;i,j}\right) = \dot{e}^{(r)}_{a,b;i,j}$$

для $1 \le a \le m, 1 \le b < m, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_b, s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_{\min(a,b)}(\nu)$ и

$$\mathrm{gr}\Delta_R\left(e^{(r)}_{a,m;i,j}\right) = \sum_{k=1}^{t} \dot{e}^{(r-1)}_{a,m;i,k} x_{k,j} + f^{(r)}_{a;i,j}$$

для $1 \le a \le m, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_m$ и $s_{a,m}(\nu) < r \le s_{a,m}(\nu) + p_a(\nu)$.

По предположению индукции и теореме Пуанкаре-Биркхоффа-Витта для $U(\mathfrak{gl}_t)$ элементы

$$x_{i,j}, \quad 1 \leq i,j \leq t,$$
$$\dot{e}^{(r)}_{a,b;i,j}, \quad 1 \leq a \leq m, 1 \leq b < m, 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_b, s_{a,b}(\nu) < r \leq s_{a,b}(\nu)$$
$$\dot{e}^{(r)}_{a,m;i,j}, \quad 1 \leq a \leq m, 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_m, s_{a,m}(\nu) + \delta_{a,m} - 1 < r \leq s_{a,m}(\nu$$

алгебраически независимы в $\mathrm{gr}(Y_{n,l-1}(\dot{\sigma}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t))$. Тогда образы порождающих

$$\{e^{(r)}_{a,b;i,j} \colon 1 \leq a,b \leq m, 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_b, s_{a,b}(\nu) < r \leq s_{a,b}(\nu)+p_{\min(a,b)}$$

в $\mathrm{gr}\, Y_{n,l}(\sigma)$ (под действием $\mathrm{gr}\Delta_R$) алгебраически независимы в $\mathrm{gr}\, Y_{n,l-1}(\dot{\sigma}) \otimes U(\mathfrak{gl}_t)$. Следовательно, $\mathrm{gr}\Delta_R$ инъективно, а порождающие, приведенные выше, алгебраически независимы в $\mathrm{gr}\, Y_{n,l}(\sigma)$.

Таким образом, для любой допустимой формы $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ мономы от

$$\{D^{(r)}_{a;i,j} \colon 1 \le a \le m, 1 \le i, j \le \nu_a, 0 < r \le p_a(\nu)\},$$
$$\{E^{(r)}_{a,b;i,j} \colon 1 \le a < b \le m, 1 \le i \le \nu_a, 1 \le j \le \nu_b, s_{a,b}(\nu) < r \le s_{a,b}(\nu) + p_a(\nu$$
$$\{F^{(r)}_{a,b;i,j} \colon 1 \le a < b \le m, 1 \le j \le \nu_a, 1 \le i \le \nu_b, s_{b,a}(\nu) < r \le s_{b,a}(\nu) + p_a(\nu$$

образуют базис $Y_{n,l}(\sigma)$.