Коумножение на сдвинутых Янгианах

Слава Иванов

22 апреля 2021 г.

Взрослое/детское коумножение

$$\Delta : Y_n \to Y_n \otimes Y_n$$

$$Y_n(\sigma) \hookrightarrow Y_n$$

Можно ограничить на $Y_n(\sigma)$, получим

Теорема

$$\Delta : Y_n(\sigma) \to Y_n(\sigma') \otimes Y_n(\sigma'')$$

где $\sigma = \sigma' + \sigma''$ - верхне- и нижнетреугольная части

Коумножение через орбиты

$$\mathcal{W}_{\mu_1} \times \mathcal{W}_{\mu_2} \to \mathcal{W}_{\mu_1+\mu_2}$$

$$\mathcal{O}(\mathcal{W}_{\mu_1+\mu_2}) \to \mathcal{O}(\mathcal{W}_{\mu_1}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{W}_{\mu_2})$$

$$gr(Y_\mu) \simeq \mathcal{O}(\mathcal{W}_\mu)$$

$$gr(Y_{\mu_1+\mu_2}) \to gr(Y_{\mu_1}) \otimes gr(Y_{\mu_2})$$

Теорема

$$Y_{\mu_1+\mu_2} \to Y_{\mu_1} \otimes Y_{\mu_2}$$

Сдвинутые Янгианы

$\sigma = (s_{i,j})$ - матрица сдвигов

$$s_{i,j} + s_{j,k} = s_{i,k}, \text{ если } |i-j| + |j-k| = |i-k|$$

Сдвинутый Янгиан $Y_n(\sigma)$ порождается

$$D_i^{(r)}, r > 0, E_i^{(r)}, r > s_{i,i+1}, F_i^{(r)}, r > s_{i+1,i}$$

Сдвинутые Янгианы

$$[D_i^{(r)}, D_j^{(s)}] = 0,$$

$$[E_i^{(r)}, F_j^{(s)}] = \delta_{i,j} \sum_{t=0}^{r+s-1} \widetilde{D}_i^{(t)} D_{i+1}^{(r+s-1-t)},$$

$$[D_i^{(r)}, E_j^{(s)}] = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1}) \sum_{t=0}^{r-1} D_i^{(t)} E_j^{(r+s-1-t)},$$

$$[D_i^{(r)}, F_j^{(s)}] = (\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}) \sum_{t=0}^{r-1} F_j^{(r+s-1-t)} D_i^{(t)},$$

Сдвинутые Янгианы

$$[E_i^{(r)}, E_i^{(s)}] = \sum_{t=s_{i,i+1}+1}^{s-1} E_i^{(t)} E_i^{(r+s-1-t)} - \sum_{t=s_{i,i+1}+1}^{r-1} E_i^{(t)} E_i^{(r+s-1-t)},$$

$$[F_i^{(r)}, F_i^{(s)}] = \sum_{t=s_{i+1,i}+1}^{r-1} F_i^{(r+s-1-t)} F_i^{(t)} - \sum_{t=s_{i+1,i}+1}^{s-1} F_i^{(r+s-1-t)} F_i^{(t)},$$

$$[E_i^{(r)}, E_{i+1}^{(s+1)}] - [E_i^{(r+1)}, E_{i+1}^{(s)}] = -E_i^{(r)} E_{i+1}^{(s)},$$
$$[F_i^{(r+1)}, F_{i+1}^{(s)}] - [F_i^{(r)}, F_{i+1}^{(s+1)}] = -F_{i+1}^{(s)} F_i^{(r)},$$

$$\begin{aligned}
[E_i^{(r)}, E_j^{(s)}] &= 0 \qquad \text{if } |i-j|>1,\\
[F_i^{(r)}, F_j^{(s)}] &= 0 \qquad \text{if } |i-j|>1,\\
[E_i^{(r)}, [E_i^{(s)}, E_j^{(t)}]] + [E_i^{(s)}, [E_i^{(r)}, E_j^{(t)}]] &= 0 \qquad \text{if } |i-j|=1,\\
[F_i^{(r)}, [F_i^{(s)}, F_j^{(t)}]] + [F_i^{(s)}, [F_i^{(r)}, F_j^{(t)}]] &= 0 \qquad \text{if } |i-j|=1,
\end{aligned}$$

Сдвинутые Янгианы

$$E_{i,i+1}^{(r)} := E_i^{(r)}, E_{i,j}^{(r)} := [E_{i,j-1}^{(r-s_{j-1,j})}, E_{j-1}^{(s_{j-1,j}+1)}]$$

$$F_{i,i+1}^{(r)} := F_i^{(r)}, F_{i,j}^{(r)} := [F_{j-1}^{(s_{j,j-1}+1)}, F_{i,j-1}^{(r-s_{j,j-1})}]$$

$D_i^{(r)}, r > 0,\ E_{i,j}^{(r)}, r > s_{i,j},\ F_{i,j}^{(r)}, r > s_{j,i},\ i < j$ - ПБВ образующие

Имеется вложение $Y_n(\sigma) \to Y_n$

Параболическая реализация

$$n = \nu_1 + \ldots + \nu_m$$

$$s_{a,b}(\nu) = s_{\nu_1+\ldots+\nu_a, \nu_1+\ldots+\nu_b}$$

$Y_n(\sigma)$ порождается образующими

$$D^{(r)}_{a;i,j}, r > 0, 1 \leq i, j \leq \nu_a$$

$$E^{(r)}_{a;i,j}, r > s_{a,a+1}(\nu), 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_{a+1}$$

$$F^{(r)}_{a;i,j}, r > s_{a+1,a}(\nu), 1 \leq i \leq \nu_{a+1}, 1 \leq j \leq \nu_a$$

Параболическая реализация

$$[D^{(r)}_{a;i,j}, D^{(s)}_{b;h,k}] = \delta_{a,b} \sum_{t=0}^{\min(r,s)-1} \left(D^{(r+s-1-t)}_{a;i,k} D^{(t)}_{a;h,j} - D^{(t)}_{a;i,k} D^{(r+s-1-t)}_{a;h,j} \right),$$

$$[E^{(r)}_{a;i,j}, F^{(s)}_{b;h,k}] = \delta_{a,b} \sum_{t=0}^{r+s-1} \widetilde{D}^{(r+s-1-t)}_{a;i,k} D^{(t)}_{a+1;h,j},$$

$$[D^{(r)}_{a;i,j}, E^{(s)}_{b;h,k}] = \delta_{a,b} \sum_{t=0}^{r-1} \sum_{g=1}^{\nu_a} D^{(t)}_{a;i,g} E^{(r+s-1-t)}_{a;g,k} \delta_{h,j} - \delta_{a,b+1} \sum_{t=0}^{r-1} D^{(t)}_{b+1;i,k} E^{(r+s-1-t)}_{b;h,j},$$

$$[D^{(r)}_{a;i,j}, F^{(s)}_{b;h,k}] = \delta_{a,b+1} \sum_{t=0}^{r-1} F^{(r+s-1-t)}_{b;i,k} D^{(t)}_{b+1;h,j} - \delta_{a,b} \delta_{i,k} \sum_{t=0}^{r-1} \sum_{g=1}^{\nu_a} F^{(r+s-1-t)}_{a;h,g} D^{(t)}_{a;g,j},$$

$$[E^{(r)}_{a;i,j}, E^{(s)}_{a;h,k}] = \sum_{t=s_{a,a+1}(\nu)+1}^{s-1} E^{(t)}_{a;i,k} E^{(r+s-1-t)}_{a;h,j} - \sum_{t=s_{a,a+1}(\nu)+1}^{r-1} E^{(t)}_{a;i,k} E^{(r+s-1-t)}_{a;h,j},$$

$$[F^{(r)}_{a;i,j}, F^{(s)}_{a;h,k}] = \sum_{t=s_{a+1,a}(\nu)+1}^{r-1} F^{(r+s-1-t)}_{a;i,k} F^{(t)}_{a;h,j} - \sum_{t=s_{a+1,a}(\nu)+1}^{s-1} F^{(r+s-1-t)}_{a;i,k} F^{(t)}_{a;h,j},$$

$$[E^{(r)}_{a;i,j}, E^{(s+1)}_{a+1;h,k}] - [E^{(r+1)}_{a;i,j}, E^{(s)}_{a+1;h,k}] = -\sum_{g=1}^{\nu_{a+1}} E^{(r)}_{a;i,g} E^{(s)}_{a+1;g,k} \delta_{h,j},$$

$$[F^{(r+1)}_{a;i,j}, F^{(s)}_{a+1;h,k}] - [F^{(r)}_{a;i,j}, F^{(s+1)}_{a+1;h,k}] = -\delta_{i,k} \sum_{g=1}^{\nu_{a+1}} F^{(s)}_{a+1;h,g} F^{(r)}_{a;g,j},$$

$$[E^{(r)}_{a;i,j}, E^{(s)}_{b;h,k}] = 0 \qquad \text{if } b > a+1 \text{ or if } b = a+1 \text{ and } h \neq j,$$

$$[F^{(r)}_{a;i,j}, F^{(s)}_{b;h,k}] = 0 \qquad \text{if } b > a+1 \text{ or if } b = a+1 \text{ and } i \neq k,$$

$$[E^{(r)}_{a;i,j}, [E^{(s)}_{a;h,k}, E^{(t)}_{b;f,g}]] + [E^{(s)}_{a;i,j}, [E^{(r)}_{a;h,k}, E^{(t)}_{b;f,g}]] = 0 \qquad \text{if } |a-b| = 1,$$

$$[F^{(r)}_{a;i,j}, [F^{(s)}_{a;h,k}, F^{(t)}_{b;f,g}]] + [F^{(s)}_{a;i,j}, [F^{(r)}_{a;h,k}, F^{(t)}_{b;f,g}]] = 0 \qquad \text{if } |a-b| = 1,$$

Параболическая реализация

$$E^{(r)}_{a,b;i,j} = [E^{(r-s_{b-1,b}(\nu))}_{a,b-1;i,k}, E^{(s_{b-1,b}(\nu)+1)}_{b-1;k,j}]$$

ПБВ образующие в параболической реализации:

$$D^{(r)}_{a,b;i,j}, r > 0, 1 \leq i,j \leq \nu_a$$

$$E^{(r)}_{a,b;i,j}, r > s_{a,a+1}(\nu), 1 \leq i \leq \nu_a, 1 \leq j \leq \nu_b$$

$$F^{(r)}_{a,b;i,j}, r > s_{a+1,a}(\nu), 1 \leq i \leq \nu_b, 1 \leq j \leq \nu_a$$

Детское коумножение

Для обычных Янгианов имеется коумножение

$$\Delta(T_{i,j}^{(r)}) = \sum_{s=0}^{r} \sum_{k=1}^{n} T_{i,k}^{(s)} \otimes T_{k,j}^{(r-s)}$$

$$\kappa_1 : Y_n \to \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$$

$$\kappa_1(T_{i,j}^{(1)}) = e_{i,j}$$

$$\kappa_1(T_{i,j}^{(r)}) = 0 \text{ при } r > 1$$

Детское коумножение

$$\Delta_R := (id \otimes \kappa_1) \circ \Delta : Y_n \to Y_n \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$$

$$\Delta_R(T_{i,j}^{(r)}) = T_{i,j}^{(r)} \otimes 1 + \sum_{k=1}^{n} T_{i,k}^{(r-1)} \otimes e_{k,j}$$

$$\Delta_L := (\kappa_1 \otimes id) \circ \Delta : Y_n \to \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n) \otimes Y_n$$

$$\Delta_L(T_{i,j}^{(r)}) = 1 \otimes T_{i,j}^{(r)} + \sum_{k=1}^{n} e_{i,k} \otimes T_{k,j}^{(r-1)}$$

Пусть $s_{n-\nu_m,n-\nu_m+1} > 0$. Обозначим $\dot{\sigma} = (\dot{s}_{i,j})$, где

$$\dot{s}_{i,j} = \begin{cases} s_{i,j} - 1 & \text{если } i \leq n - \nu_m < j \\ s_{i,j} & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Delta_R : Y_n(\sigma) \to Y_n(\dot{\sigma}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{\nu_m})$$

$$D^{(r)}_{a;i,j} \mapsto D^{(r)}_{a;i,j} \otimes 1 + \delta_{a,m} \sum_{k=1}^{\nu_m} D^{(r-1)}_{a;i,k} \otimes \tilde{e}_{k,j}$$

$$E^{(r)}_{a;i,j} \mapsto E^{(r)}_{a;i,j} \otimes 1 + \delta_{a,m-1} \sum_{k=1}^{\nu_m} E^{(r-1)}_{a;i,k} \otimes \tilde{e}_{k,j}$$

$$F^{(r)}_{a;i,j} \mapsto F^{(r)}_{a;i,j} \otimes 1$$

где $\tilde{e}_{i,j} := e_{i,j} - \delta_{i,j}(n - \nu_m) \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{\nu_m})$

Пусть $s_{n-\nu_m+1,n-\nu_m} > 0$ Обозначим $\dot{\sigma} = (\dot{s}_{i,j})$, где

$$\dot{s}_{i,j} = \begin{cases} s_{i,j} - 1 & \text{если } j \leq n - \nu_m < i \\ s_{i,j} & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Delta_L : Y_n(\sigma) \to \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{\nu_m}) \otimes Y_n(\dot{\sigma})$$

$$D^{(r)}_{a;i,j} \mapsto 1 \otimes D^{(r)}_{a;i,j} + \delta_{a,m} \sum_{k=1}^{\nu_m} \tilde{e}_{i,k} \otimes D^{(r-1)}_{a;i,k}$$

$$E^{(r)}_{a;i,j} \mapsto 1 \otimes E^{(r)}_{a;i,j}$$

$$F^{(r)}_{a;i,j} \mapsto 1 \otimes F^{(r)}_{a;i,j} + \delta_{a,m-1} \sum_{k=1}^{\nu_m} \tilde{e}_{i,k} \otimes F^{(r-1)}_{a;i,k}$$

Доказательство теоремы, первое соотношение

$$[E^{(r)}_{m-2;i,j}, E^{(s+1)}_{m-1;h,k}]-[E^{(r+1)}_{m-2;i,j}, E^{(s)}_{m-1;h,k}] = -\sum_{g=1}^{\nu_m} E^{(r)}_{m-2;i,g} E^{(s)}_{m-1;g,k}\delta_{h,j}$$

Применим Δ_R и выпишем левую часть:

$$[E^{(r)}_{m-2;i,j} \otimes 1, E^{(s+1)}_{m-1;h,k} \otimes 1 + \sum_{l=1}^{\nu_m} E^{(s)}_{m-1;h,l} \otimes \tilde{e}_{l,k}]-$$

$$-[E^{(r+1)}_{m-2;i,j} \otimes 1, E^{(s)}_{m-1;h,k} \otimes 1 + \sum_{l=1}^{\nu_m} E^{(s-1)}_{m-1;h,l} \otimes \tilde{e}_{l,k}] =$$

$$= [E^{(r)}_{m-2;i,j}, E^{(s+1)}_{m-1;h,k}] \otimes 1 - [E^{(r+1)}_{m-2;i,j}, E^{(s)}_{m-1;h,k}] \otimes 1+$$

$$+[E^{(r)}_{m-2;i,j}, \sum_{l=1}^{\nu_m} E^{(s)}_{m-1;h,l}] \otimes \tilde{e}_{l,k} - [E^{(r+1)}_{m-2;i,j}, \sum_{l=1}^{\nu_m} E^{(s-1)}_{m-1;h,l}] \otimes \tilde{e}_{l,k} =$$

Доказательство теоремы, первое соотношение

$$= ([E^{(r)}_{m-2;i,j}, E^{(s+1)}_{m-1;h,k}] - [E^{(r+1)}_{m-2;i,j}, E^{(s)}_{m-1;h,k}]) \otimes 1 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\nu_m} ([E^{(r)}_{m-2;i,j}, E^{(s)}_{m-1;h,l}] - [E^{(r+1)}_{m-2;i,j}, E^{(s-1)}_{m-1;h,l}]) \otimes \tilde{e}_{l,k}$$

Посчитаем правую часть

$$-\delta_{h,j} \sum_{g=1}^{\nu_m} E^{(r)}_{m-2;i,g} E^{(s)}_{m-1;g,k} \otimes 1 - \delta_{h,j} \sum_{g=1}^{\nu_m} \sum_{l=1}^{\nu_m} E^{(r)}_{m-2;i,g} E^{(s-1)}_{m-1;g,l} \otimes \tilde{e}_{l,k}$$

Доказательство теоремы, второе соотношение

$$[E_{a;i,j}^{(r)}, E_{a;h,k}^{(s)}] = \sum_{t=s_{a,a+1}(\nu)+1}^{s-1} E_{a;i,k}^{(t)} E_{a;h,j}^{(r+s-1-t)} - \sum_{t=s_{a,a+1}(\nu)+1}^{r-1} E_{a;i,k}^{(t)} E_{a;h,j}^{(r+s-1-t)}$$

Пусть $r < s, a = m - 1$. Обозначим $X_{i,j}^{(r)} := E_{m-1;i,j}^{(r)}$, тогда соотношение принимает вид

$$[X_{i,j}^{(r)}, X_{h,k}^{(s)}] = \sum_{t=r}^{s-1} X_{i,k}^{(t)} X_{h,j}^{(r+s-1-t)}$$

Доказательство теоремы, второе соотношение

Левая часть:

1. $[X_{i,j}^{(r)} \otimes 1, X_{h,k}^{(s)} \otimes 1] = \sum_{t=r}^{s-1} X_{i,k}^{(t)} X_{h,j}^{(r+s-1-t)} \otimes 1$
2. $[\sum_a X_{i,a}^{(r-1)} \otimes e_{a,j}, X_{h,k}^{(s)} \otimes 1] = \sum_a \sum_{t=r-1}^{s-1} X_{i,k}^{(t)} X_{h,a}^{(r+s-2-t)} \otimes e_{a,j}$
3. $[X_{i,j}^{(r)} \otimes 1, \sum_b X_{h,b}^{(s-1)} \otimes e_{b,k}] =$
   $\sum_b \sum_{t=r+1}^{s-1} X_{i,b}^{(t-1)} X_{h,j}^{(r+s-1-t)} \otimes e_{b,k}$
4. $$[\sum_a X_{i,a}^{(r-1)} \otimes e_{a,j}, \sum_b X_{h,b}^{(s-1)} \otimes e_{b,k}] = \sum_{a,b} ([X_{i,a}^{(r-1)}, X_{h,b}^{(s-1)}] \otimes e_{b,k} e_{a,j}$$
   $$+ X_{i,a}^{(r-1)} X_{h,b}^{(s-1)} \otimes [e_{a,j}, e_{b,k}])$$

Доказательство теоремы, второе соотношение

Четвёртое слагаемое:

$$\sum_{a,b}\sum_{t=r-1}^{s-2} X_{i,b}^{(t)} X_{a,h}^{(r+s-3-t)} \otimes e_{b,k}e_{a,j} +$$

$$+ X_{i,a}^{(r-1)} X_{h,j}^{(s-1)} \otimes e_{a,k} - X_{i,k}^{(r-1)} X_{h,b}^{(s-1)} \otimes e_{b,j}$$

Складываем:

$$\sum_{t=r}^{s-1} (X_{i,k}^{(t)} \otimes 1 + \sum_b X_{i,b}^{(t-1)} \otimes e_{b,k})(X_{h,j}^{(r+s-1-t)} \otimes 1 + \sum_a X_{h,a}^{(r+s-2-t)} \otimes e_{a,j}) +$$

$$+ \sum_a X_{i,k}^{(r-1)} X_{h,a}^{(s-1)} \otimes e_{a,j} - \sum_b X_{i,b}^{(r-1)} X_{h,j}^{(s-1)} \otimes e_{b,k} +$$

$$+ \sum_a X_{i,a}^{(r-1)} X_{h,j}^{(s-1)} \otimes e_{a,k} - \sum_b X_{i,k}^{(r-1)} X_{h,b}^{(s-1)} \otimes e_{b,j}$$

Предложение

Выписанное коумножение не зависит от выбора конкретных σ и ν.

Покажем на примере $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В этом случае у нас может быть 2 разбиения: $(2, 2)$ и $(1, 1, 2)$.

Образующие в первом разбиении:

$$\begin{pmatrix} D_{1;1,1} & D_{1;1,2} & E_{1;1,1} & E_{1;1,2} \\ D_{1;2,1} & D_{1;2,2} & E_{1;2,1} & E_{1;2,2} \\ F_{1;1,1} & F_{1;1,2} & D_{2;1,1} & D_{2;2,2} \\ F_{1;2,1} & F_{1;2,2} & D_{2;2,1} & D_{2;2,2} \end{pmatrix}$$

Образующие во втором разбиении:

$$\begin{pmatrix} D_{1;1,1} & E_{1;1,1} & E_{1,3;1,1} & E_{1,3;1,2} \\ F_{1;1,1} & D_{1;2,2} & E_{2;1,1} & E_{2;1,2} \\ F_{1,3;1,1} & F_{2;1,2} & D_{2;1,1} & D_{2;2,2} \\ F_{1,3;2,1} & F_{2;2,2} & D_{2;2,1} & D_{2;2,2} \end{pmatrix}$$

Пример

Пример $n = 2$:

$Y_2(\sigma)$, $Y_2(\dot{\sigma})$ изоморфны при $s_{1,2} + s_{2,1} = \dot{s}_{1,2} + \dot{s}_{2,1}$, то достаточно рассмотреть случай $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4 набора образующих:

$$D_1^{(r)}, r > 0, D_2^{(r)}, r > 0, E_1^{(r)}, r > s, F_1^{(r)}, r > 0$$

Пример

Обозначим $\dot{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & s-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Delta_R : Y_2(\sigma) \to Y_2(\dot{\sigma}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_1)$$

$$\Delta_R(D_1^{(r)}) = D_1^{(r)} \otimes 1$$

$$\Delta_R(D_2^{(r)}) = D_2^{(r)} \otimes 1 + D_2^{(r-1)} \otimes \tilde{e}_{1,1}$$

$$\Delta_R(E_1^{(r)}) = E_1^{(r)} \otimes 1 + E_1^{(r-1)} \otimes \tilde{e}_{1,1}$$

$$\Delta_R(F_1^{(r)}) = F_1^{(r)} \otimes 1$$

Теорема для ПБВ образующих

Для правого коумножения имеем:

$$\Delta_R(E^{(r)}_{a,b;i,j}) = \begin{cases} E^{(r)}_{a,b;i,j} \otimes 1 & \text{если } b < m \\ [E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h}, E^{(r-s_{m-1,m}(\nu)+1)}_{m-1;h,j}] \otimes 1 + \\ + \sum_{k=1}^{\nu_m} E^{(r-1)}_{a,m;i,k} \otimes \tilde{e}_{k,j} & \text{если } b = m \end{cases}$$

$$\Delta_R(F^{(r)}_{a,b;i,j}) = F^{(r)}_{a,b;i,j} \otimes 1$$

Теорема для ПБВ образующих

Аналогично для левого коумножения:

$$\Delta_L(F^{(r)}_{a,b;i,j}) = \begin{cases} 1 \otimes F^{(r)}_{a,b;i,j} & \text{если } b < m \\ 1 \otimes [F^{(r-s_{m,m-1}(\nu)+1)}_{m-1;i,h}, F^{(r-s_{m,m-1}(\nu))}_{a,m-1;h,j}] + \\ + \sum_{k=1}^{\nu_m} \tilde{e}_{i,k} \otimes F^{(r-1)}_{a,m;k,j} & \text{если } b = m \end{cases}$$

$$\Delta_L(E^{(r)}_{a,b;i,j}) = 1 \otimes E^{(r)}_{a,b;i,j}$$

Доказательство теоремы

Достаточно посчитать только $\Delta_R(E^{(r)}_{a,m;i,j})$. По определению

$$E^{(r)}_{a,m;i,j} = [E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h}, E^{(s_{m-1,m}(\nu)+1)}_{m-1;h,j}]$$

$$\Delta_R(E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h}) = E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h} \otimes 1$$

$$\Delta_R(E^{(s_{m-1,m}(\nu)+1)}_{m-1;h,j}) = E^{(s_{m-1,m}(\nu)+1)}_{m-1;h,j} \otimes 1 + \sum_{k=1}^{\nu_m} E^{(s_{m-1,m}(\nu))}_{m-1;h,k} \otimes \tilde{e}_{k,j}$$

Доказательство теоремы

$$\Delta_R(E^{(r)}_{a,m;i,j}) = [E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h}\otimes 1, E^{(s_{m-1,m}(\nu)+1)}_{m-1;h,j}\otimes 1+\sum_{k=1}^{\nu_m} E^{(s_{m-1,m}(\nu))}_{m-1;h,k}\otimes \tilde{e}_{k,j}]$$

$$= [E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h}, E^{(s_{m-1,m}(\nu)+1)}_{m-1;h,j}]\otimes 1+\sum_{k=1}^{\nu_m}[E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h}, E^{(s_{m-1,m}(\nu))}_{m-1;h,k}]\otimes \tilde{e}_{k,j}$$

$$= [E^{(r-s_{m-1,m}(\nu))}_{a,m-1;i,h}, E^{(s_{m-1,m}(\nu)+1)}_{m-1;h,j}] \otimes 1 + \sum_{k=1}^{\nu_m} E^{(r-1)}_{a,m;i,k} \otimes \tilde{e}_{k,j}$$

Определение

Толстый грассманиан $\mathbb{G}r_G$ определяется как $G((t^{-1}))/G[t]$.

$G[[t^{-1}]]_1$ - ядро отображения, которое переводит t^{-1} в 0.
$\mathcal{W}_\mu$ это орбита элемента $t^{w_0\mu}$:

$$\mathcal{W}_\mu = G[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu}$$

$$gr(Y_\mu) \simeq \mathcal{O}(\mathcal{W}_\mu)$$

Сдвинутый Янгиан, соответствующий весу

Предложение

$Y_\mu = Y(\sigma)$, где $s_{i,i+1} = 0$, $s_{i+1,i} = \mu_{n-i} - \mu_{n-i+1}$

Y_μ порождается $D_i^{(r)}, r > 0$, $E_i^{(r)}, r > 0$, $F_\alpha^{(r)}, r > -(w_0\mu, \alpha)$.
Для случая, когда $\alpha = \alpha_i$ - простой корень, получаем

$$r > (-w_0\mu, \alpha_i) = (\sum_{i=1}^{n-1}(\mu_{n-i} - \mu_{n-i+1})\omega_i, \alpha_i) = \mu_{n-i} - \mu_{n-i+1}$$

Орбита через разложение Гаусса

$$\mathcal{G}r_\mu = G[[t^{-1}]]_1 \cap t^{w_0\mu} G[[t^{-1}]]_1 t^{-w_0\mu} \in G[[t^{-1}]]_1$$

Разложение Гаусса:

$$\mathcal{G}r_\mu = U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu} U[[t^{-1}]]_1 t^{-w_0\mu}$$

$$\mathcal{W}_\mu = U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu} U[[t^{-1}]]_1$$

Определение

Пусть μ произвольный вес, тогда

$$\mathcal{W}_\mu := U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu} U[[t^{-1}]]_1$$

Умножение для антидоминантных весов

Предложение

Пусть μ_1, μ_2 - антидоминантные веса, тогда существует отображение
$$\mathcal{W}_{\mu_1} \times \mathcal{W}_{\mu_2} \to \mathcal{W}_{\mu_1+\mu_2}$$

Элемент из $\mathcal{W}_{\mu_i}$ имеет вид $u_{-,i} d_i t^{w_0 \mu_i} u_i$
Необходимо проверить, что

$$u_{-,1} d_1 t^{w_0\mu_1} u_1 u_{-,2} d_2 t^{w_0\mu_2} u_2 \in \mathcal{W}_{\mu_1+\mu_2}$$

$$u_{-,1} d_1 t^{w_0\mu_1} u_1 u_{-,2} d_2 t^{w_0\mu_2} u_2 \in U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu_1+w_0\mu_2} U[[t^{-1}]]_1$$

Умножение для антидоминантных весов

$$t^{w_0\mu_1} d_1 u_1 u_{-,2} d_2 t^{w_0\mu_2} \in U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu_1+w_0\mu_2} U[[t^{-1}]]_1$$

$d_1 u_1 u_{-,2} d_2$ - элемент из $G[[t^{-1}]]_1$, поэтому его можно записать в виде $u'_- d u'$

$$t^{w_0\mu_1} u'_- d u' t^{w_0\mu_2} = (t^{w_0\mu_1} u'_- t^{-w_0\mu_1})(d t^{w_0\mu_1+w_0\mu_1})(t^{-w_0\mu_2} u' t^{w_0\mu_2})$$

Предложение

- $t^{-\mu} U[[t^{-1}]]_1 t^{\mu} \subset U[[t^{-1}]]_1 \Leftrightarrow \mu$ - доминантный.
- $t^{-\mu} U_-[[t^{-1}]]_1 t^{\mu} \subset U_-[[t^{-1}]]_1 \Leftrightarrow \mu$ - антидоминантный.

Умножение для антидоминантных весов

Следовательно:

$$t^{w_0\mu_1} u'_- t^{-w_0\mu_1} \in U_-[[t^{-1}]]_1$$

$$t^{-w_0\mu_2} u' t^{w_0\mu_2} \in U[[t^{-1}]]_1$$

Получаем:

$$(t^{w_0\mu_1} u'_- t^{-w_0\mu_1})(dt^{w_0\mu_1+w_0\mu_1})(t^{-w_0\mu_2} u' t^{w_0\mu_2}) \in$$
$$\in U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu_1+w_0\mu_2} U[[t^{-1}]]_1$$

Умножение для доминантных весов

Предложение

$U[[t^{-1}]]_1 = U((t^{-1}))/U[t]$

С помощью этого можно записать
$U_-[[t^{-1}]]_1 T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu_1 + w_0\mu_2} U[[t^{-1}]]_1$ как

$$U[t]\backslash U_-((t^{-1})) T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu} U((t^{-1}))/U[t]$$

Существует отображение

$$\mathcal{W}_{\mu_1} \times \mathcal{W}_{\mu_2} \to U_-((t^{-1})) T[[t^{-1}]]_1 t^{w_0\mu_1 + w_0\mu_2} U((t^{-1}))$$

$$\mathcal{W}_{\mu_1} \times \mathcal{W}_{\mu_2} \to \mathcal{W}_{\mu_1 + \mu_2}$$

Коумножение

$$\mathcal{W}_{\mu_1} \times \mathcal{W}_{\mu_2} \to \mathcal{W}_{\mu_1+\mu_2}$$

$$\Delta : \mathcal{O}(\mathcal{W}_{\mu_1+\mu_2}) \to \mathcal{O}(\mathcal{W}_{\mu_1}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{W}_{\mu_2})$$

$$\Delta : gr(Y_{\mu_1+\mu_2}) \to gr(Y_{\mu_1}) \otimes gr(Y\mu_2)$$

Теорема

Коумножение Δ квантуется до коумножения на Янгианах:

$$\Delta : Y_{\mu_1+\mu_2} \to Y_{\mu_1} \otimes Y_{\mu_2}$$

Пример

$$\mathcal{W}_0 \times \mathcal{W}_2 \times \mathcal{W}_0 \to \mathcal{W}_2$$

$$(A, B, C) \to (AB)C$$

$$(A, B, C) \to A(BC)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}_0 = G[[t^{-1}]]_1$$

$$B = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in \mathcal{W}_2 = G[[t^{-1}]]_1 \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}_0 = G[[t^{-1}]]_1$$

Пример

Перемножим A и B.

$$\begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ при факторизации в $U[[t^{-1}]]_1$, поэтому
$AB = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$
Теперь посчитаем $(AB)C$.

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Пример

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Посчитаем $A(BC)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

Предложение

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{a}{1+ab} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+ab & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+ab} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{1+ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t^{-1}}{1+t^{-2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t^{-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^{-1}}{1+t^{-2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t^{-1}}{1+t^{-2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t^{-2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^{-3}}{1+t^{-2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Распишем дробь и уберём мономы с положительной степенью:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^{-1} - t^{-3} + \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t^{-2} & 0 \\ 0 & 1 - t^{-2} + t^{-4} + \dots \end{pmatrix} *$$

$$\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t^{-3} - t^{-5} + \dots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Дальнейшие утверждения

Теорема

Пусть μ - доминантный, тогда $\mathcal{W}_\mu$ - пуссоново многообразие, причём вложение $\mathcal{W}_\mu \hookrightarrow \mathbb{G}r_G$ - пуассоново.

Теорема

Пусть μ - антидоминантный, тогда $\mathcal{W}_\mu$ - пуссоново многообразие, причём вложение $\mathcal{W}_\mu \hookrightarrow G((t^{-1}))$ - пуассоново.

Доказательство основано на том факте, что если (D, P, Q) - тройка Манина, то связные компоненты множества $PxP \cap QyQ, x, y \in D$ являются симплектическими листами. В нашем случае тройка Манина имеет вид $(G((t^{-1})), G[[t^{-1}]]_1, G[t])$.
Если μ - антидоминантный, то $\mathcal{W}_\mu = G[[t^{-1}]]_1 t^\mu G[[t^{-1}]]_1$

$$\mathcal{W}_\mu^\nu = G[[t^{-1}]]_1 t^\mu G[[t^{-1}]]_1 \cap G[t] t^\nu G[t]$$

- симплектические листы, их объединение всюду плотно в $\mathcal{W}_\mu$.

Дальнейшие утверждения

$$\iota_{\mu,\mu_1,\mu_2} : Y_\mu \to Y_{\mu+\mu_1+\mu_2}$$

$$\iota_{\mu,\mu_1,\mu_2}(H_i^{(r)}) = H_i^{(r-(\mu_1+\mu_2,\alpha_i))}$$

$$\iota_{\mu,\mu_1,\mu_2}(E_i^{(r)}) = E_i^{(r-(\mu_1,\alpha_i))}$$

$$\iota_{\mu,\mu_1,\mu_2}(F_i^{(r)}) = F_i^{(r-(\mu_2,\alpha_i))}$$

$$\iota_{\mu,\mu_1,\mu_2} : \mathcal{W}_{\mu+\mu_1+\mu_2} \to \mathcal{W}_\mu$$

$$\iota_{\mu,\mu_1,\mu_2}(g) = \pi(t^{-\mu_1} g t^{-\mu_2})$$

Дальнейшие утверждения

Теорема

Существует изоморфизм

$$gr(Y_n) \to \mathbb{C}[\mathcal{W}_\mu]$$

который согласован с отображением сдвига, то есть следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
gr(Y_\mu) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mu,\mu_1,\mu_2}"] & \mathbb{C}[\mathcal{W}_\mu] \arrow[d, "\iota^*_{\mu,\mu_1,\mu_2}"] \\
gr(Y_{\mu+\mu_1+\mu_2}) \arrow[r] & \mathbb{C}[\mathcal{W}_{\mu+\mu_1+\mu_2}]
\end{tikzcd}$$