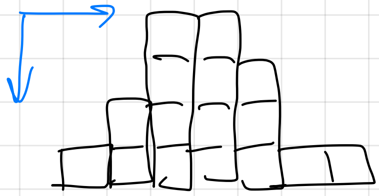
Напоминание



(1, 2, 4, 4, 3, 1, 1)

- Изучаем пирамиды $(q_1,\dots,q_\ell)$
- По пирамиде умеем строить матр. сдвига σ и $W(\pi)$ - алгебру.

Определим для $1\le i,j\le n$ (кол-во строк), $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ и

$\pi = (q_1,\dots,q_\ell)$ ← столбцы, высота $n=\max_i q_i$, $\sigma_1,\dots,\sigma_n\in\{\pm\}$

$\Downarrow$

$(p_1,\dots,p_n)$ ← строки

$$T^{(0)}_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n} := \delta_{ij}\sigma_i$$

$$\tilde{e}_{ij} = (-1)^{c_i-c_j}(e_{ij}+p_i\delta_{ij})$$

r_i – номер стр.
c_i – номер столбца

$$T^{(r)}_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n} := \sum_{s=1}^{r} \sigma_{r_{j_1}}\cdots\sigma_{r_{j_{s-1}}}\tilde{e}_{i_1 j_1}\cdots\tilde{e}_{i_s j_s}$$

фильтр Кажданa

где $1\le i_1,\dots,i_s,j_1,\dots,j_s\le N$ ← кол-во блоков π, т.ч. $(\deg e_{ij} = c_j - c_i + 1)$:

i) $\deg e_{i_1 j_1}+\dots+\deg e_{i_s j_s} = r$

ii) $c_{i_t}\le c_{j_t}$ $\forall t=1,\dots,s$

$\Bigg\} \Rightarrow T^{(r)}_{i,j;\sigma_1,\dots,\sigma_n}\in F_r U(\mathfrak{p})$

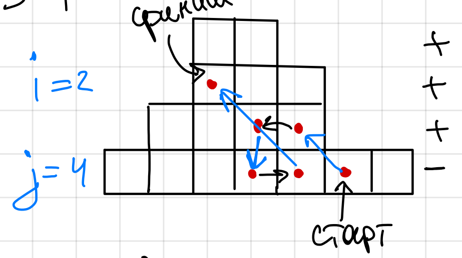
iii) $\sigma_{r_{j_t}}=+ \Rightarrow c_{j_t} < c_{i_{t+1}}$ $\forall t=1,\dots,s-1$

iv) $\sigma_{r_{j_t}}=- \Rightarrow c_{j_t}\geq c_{i_{t+1}}$ $\forall t=1,\dots,s-1$

v) $r_{i_1}=i$ $\quad r_{j_s}=j$

vi) $r_{j_t}=r_{i_{t+1}}$ $\forall t=1,\dots,s-1$

$T^{(6)}_{2,4;+,+,+,-}$



Спец-й случай $\sigma_1=\dots=\sigma_x=-$, $\sigma_{x+1}=\dots=\sigma_n=+$ $\Rightarrow T^{(r)}_{i,j;x}$ $\quad x=0,\dots,n$

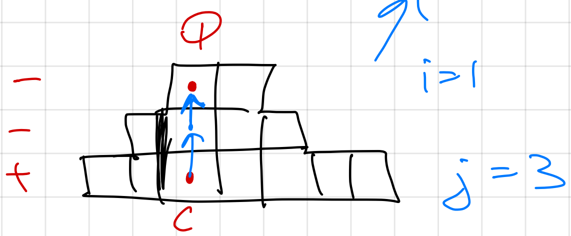
„The most crucial definition in the paper":

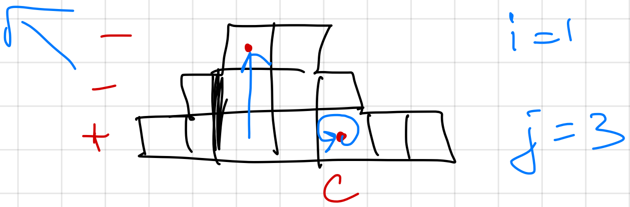
$$T_{i,j;x}(u) := \sum_{r\geq 0} T^{(r)}_{i,j;x}\, u^{-r}\in U(\mathfrak{p})[[u^{-1}]]$$

Пример: 1) $$T^{(1)}_{i,j;x} = \sum_{\substack{1\le h,k\le N\\ r_h=i,\ r_k=j\\ c_h=c_k}} \tilde{e}_{h,k}$$

где $e_{ij} = c_i - c_j$ (<u>Не</u> фильтр Калмана)

2) $$T^{(2)}_{i,j;x} = \sum_{\substack{1\le h,k\le N\\ r_h=i,\ r_k=j\\ c_h=c_k-1}} \tilde{e}_{hk} - \sum_{\substack{r_{h_1}=i,\ r_{k_2}=j\\ r_{k_1}=r_{h_2}\le X\\ c_{h_1}=c_{k_1}\ge c_{h_2}=c_{k_2}}} \tilde{e}_{h_1k_1}\tilde{e}_{h_2k_2} + \sum_{\substack{r_{h_1}=i,\ r_{k_2}=j\\ r_{k_1}=r_{h_2}> X\\ c_{h_1}=c_{k_1}< c_{h_2}=c_{k_2}}} \tilde{e}_{h_1k_1}\tilde{e}_{h_2k_2}$$





$X=2$

Лемма: Пусть $0\le X<y\le n$

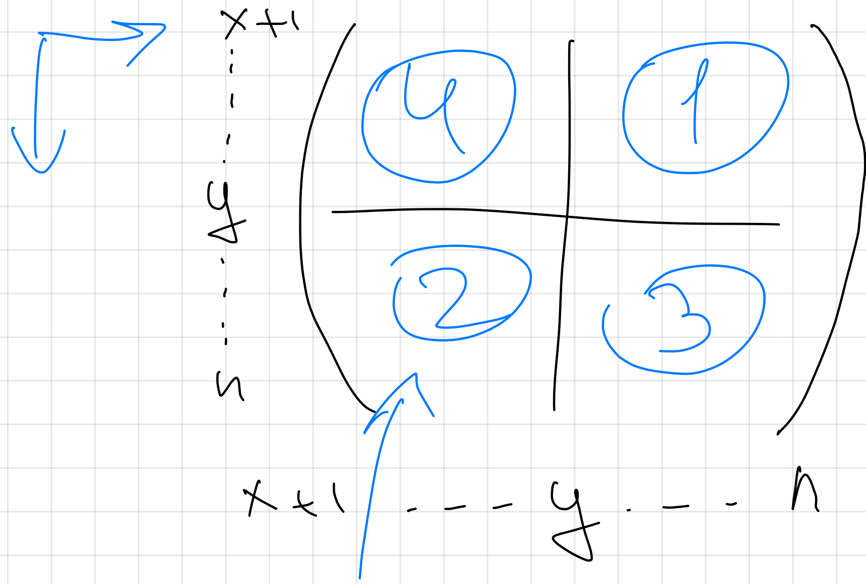
1) $$T_{i,j;x}(u) = \sum_{k=x+1}^{y} T_{i,k;x}(u)\,T_{k,j;y}(u)$$ при $0\le X<i\le y<j\le n$

2) $$T_{i,j;x}(u) = \sum_{k=x+1}^{y} T_{i,k;y}(u)\,T_{k,j;x}(u)$$ при $X<j\le y<i\le n$

3) $$T_{i,j;x}(u) = T_{i,j;y}(u) + \sum_{k,l=x+1}^{y} T_{i,k;y}(u)\,T_{k,l;x}(u)\,T_{l,j;y}(u)$$ при $y<i,j\le n$

4) $$\sum_{k=x+1}^{y} T_{i,k;x}(u)\,T_{k,j;y}(u) = -\delta_{ij}$$ при $x<i,j\le y$

$x=\nu_1+\dots+\nu_{a-1};\ y=\nu_1+\dots+\nu_a$



i, j – номера стр. и столбцов.

<u>Док-во:</u> обозначим $\xi_{ij} = \tilde{e}_{ij}\, u^{-\deg e_{ij}}$

1) Основная идея: правая часть – сумма мономов вида $\pm(\xi_{i_1 j_1}\cdots\xi_{i_r j_r})(\xi_{k_1 l_1}\cdots\xi_{k_s j_s})$ (*)

$r \geq 0$

$s \geq 1$

появл. в $T_{i,k_1;x}(u)$ появл. в $T_{k_s,j;y}(u)$

$(s \neq 0$, т.к. $T^{(0)}_{k,j;y} = -\sum_{i=1}^{y} \delta_{kj} + \sum_{i=y+1}^{n} \delta_{kj} = 0$ т.к. $k \leq y$, $j > y)$

Пусть X – сумма таких мономов с $c_{j_r} < c_{k_1}$ и $r_{l_t} \notin \{x+1, \dots, y\}$ $\forall\, 1 \leq t < s$

Пусть Y – сумма всех остальных мономов.

Хотим показать, $Y = 0$; $X = T_{i,j;x}(u)$

Возьмём моном вида (*) из X:

a) такой моном есть в разложении $T_{i,j;x}(u)$

с тем же знаком (т.к. $x \le y$ и $r_{\ell_t} \notin \{x+1, .., y\}$
$\sigma_{\ell_t} = t \ \forall t = 1, .., s$)

б) Такой моном встр-ся в X ровно один раз; предположим другие разложения:

• $\pm (\xi_{i_1 j_1} \cdots \xi_{i_r j_r} \xi_{k_1 \ell_1} \cdots \xi_{k_t \ell_t})(\xi_{k_{t+1} \ell_{t+1}} \cdots \xi_{k_s \ell_s})$
для $1 \le t < s$ но $r_{\ell_t} \notin \{x+1, .., y\}$ ↯.

• $\pm (\xi_{i_1 j_1} \cdots \xi_{i_{u-1} j_{u-1}})(\xi_{i_u j_u} \cdots \xi_{i_r j_r} \xi_{k_1 \ell_1} \cdots \xi_{k_s \ell_s})$
для $1 \le u \le r$, но $c_{j_r} < c_{k_1}$ противоречие опр. $T_{h;j;y}$
$h = r_{i_u}$ т.к. $r_{j_r} \in \{x+1, .., y\} \Rightarrow \sigma_{r_{j_r}} = -$

в) Теперь хотим, чтобы $\forall$ моном

$\pm \xi_{p_1 q_1} \cdots \xi_{p_w q_w}$

встр-ся в $T_{i;j;x}(u) \Rightarrow$ встр-ся и в X

Положим $r \geqslant 0$ — макс-й индекс, т.ч.
$\pm \xi_{p_1 q_1} \cdots \xi_{p_r q_r}$ встр-ся в $T_{i;k;x}(u)$ $x < k \le y$

такое r сущ-т, т.к. при $r = 0$ моном 1 встр-ся в $T_{i;i;x}(u)$

Заметим, что $c_{q_r} < c_{p_{r+1}}$ и $r_{q_t} \notin \{x+1, .., y\}$
$\forall t: r < t < w$

(иначе r не выбрано макс-м)

Тогда (по постр-ю) $\pm \xi_{p_{r+1}q_{r+1}} \cdots \xi_{p_w q_w}$ встр-ся в $T_{k;j;y}(u)$ $\Rightarrow$ получаем разложение вида $\pm(\xi_{p_1q_1} \cdots \xi_{p_r q_r})(\xi_{p_{r+1}q_{r+1}} \cdots \xi_{p_w q_w})$ встр-ся в X

Лемма 9.2 (Kleshchev и Brundan). ∎

Построение обр-х Янгиана

- $T(u) := \left(T_{i;j;0}(u)\right)_{i,j=1}^{n} \in Mat_n\left(U(\mathfrak{p})[[u^{-1}]]\right)$
- $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ - разбиение числа n
- $T(u) = F(u) D(u) E(u)$ - разл. Гаусса

$$\begin{pmatrix} I_{\nu_1} & & 0 \\ F_{\nu_1} & \ddots & \\ * & F_{\nu_{m-1}} & I_{\nu_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\nu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{\nu_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\nu_1} & E_{\nu_1} & * \\ & \ddots & E_{\nu_{m-1}} \\ 0 & & I_{\nu_m} \end{pmatrix}$$

$$D_a(u) \in Mat_{\nu_a}(\dots)$$

$$F_a(u) \in Mat_{\nu_{a+1} \times \nu_a} \qquad a = 1, \dots, m-1$$

$$E_a \in Mat_{\nu_a \times \nu_{a+1}}$$

$$\tilde{D}_a(u) := -D_a(u)^{-1}$$

- $D_{a;i,j}(u) = \sum_{r \geq 0} D_{a;i,j}^{(r)} u^{-r}$ $\qquad \tilde{D}_{a;i,j}(u) = \dots$

$E_{a;i,j}(u) = \dots$ $\qquad F_{a;i,j}(u) = \dots$

$\Rightarrow$ опр-ли $D^{(r)}_{a;i,j}$, $\tilde{D}^{(r)}_{a;i,j}$, $E^{(r)}_{a;i,j}$, $F^{(r)}_{a;i,j} \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$

Теор. для произв. $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ и всех допустимых a, i, j имеем:

$$D_{a;i,j}(u) = T_{\nu_1 + \dots + \nu_{a-1} + i,\ \nu_1 + \dots + \nu_{a-1} + j;\ \nu_1 + \dots + \nu_{a-1}}(u)$$

$$\tilde{D}_{a;i,j}(u) = T_{\nu_1 + \dots + \nu_{a-1} + i,\ \nu_1 + \dots + \nu_{a-1} + j;\ \nu_1 + \dots + \nu_{a}}(u)$$

$$E_{a;i,j}(u) = T_{\nu_1 + \dots + \nu_{a-1} + i,\ \nu_1 + \dots + \nu_{a} + j;\ \nu_1 + \dots + \nu_{a}}(u)$$

$$F_{a;i,j}(u) = T_{\nu_1 + \dots + \nu_{a} + i,\ \nu_1 + \dots + \nu_{a-1} + j;\ \nu_1 + \dots + \nu_{a}}(u)$$

Док-во: а) $\tilde{D}$ следует из D по $\Lambda(u)$:

при $x = \nu_1 + \dots + \nu_{a-1}$ и $y = \nu_1 + \dots + \nu_a$

б) Док-во по индукции по m

$m = 1$ — тривиально.