

# Срез Сногрови

$\sigma$  - к/м н/н  $(e, f, h)$  - слз трайца

Дуп  $S = e + \ker(\alpha df) \subset \sigma$

Пример слз  $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$   $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

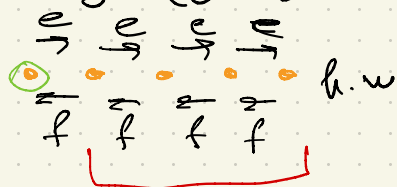
$$S = e + \mathbb{C}f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r & 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{C} \right\}$$

Препн.  $S$  транскверпен к  $G$  орбитам в  $\sigma$  и

$$\mathbb{O}_e \cap S = \{e\}.$$

До во

$$\sigma = [\sigma, e] \oplus \ker \alpha df$$

$V_\lambda =$   h.w

Транскверпеность:

$$T_p \sigma = T_p S + T_p \mathbb{O}$$

$$T_e \mathbb{O}_e = [\sigma, e]$$

$$T_e S = \ker \alpha df \Rightarrow T_e \sigma = T_e \mathbb{O}_e \oplus T_e S$$

$$\varphi: G \times S \rightarrow \sigma$$

$$(g, s) \mapsto g s g^{-1}$$

$$d\varphi: T_{(1,e)}(G \times S) \rightarrow T_e \sigma$$

в окр-ти  $e \in S$  репер транскверс.

$$sl_2 \rightarrow \sigma \rightsquigarrow SL_2 \rightarrow G \rightsquigarrow \gamma: \mathbb{C}^* \rightarrow G$$

$$(e, h, f) \quad \downarrow$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}^* \right\}$$

$$\gamma(t) e \gamma(t^{-1}) = t^2 e \Leftrightarrow [h, e] = 2e$$

$$\mathbb{C}^x \times S \rightarrow S$$

$$(t, s) \mapsto t^2 \text{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(s) = e + t^2 \text{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(x)$$

$$\parallel$$
  

$$e + x$$

$\ker(\text{ad } f) = \text{ad } h \text{ stab.}$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \text{Ad}_{\gamma(t^{-1})}(s) = e$$

$$\mathbb{D}_e \cap \underset{\parallel}{S} = \text{annihilator}$$
  

$$e + \ker(\text{ad } f)$$

Пример  $S = e + \mathbb{C}f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \mid \sigma \in \mathbb{C} \right\}$

$$\mathbb{D}_e - ? \quad g \in SL_2 \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$g h g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix} \quad d = \frac{1}{2a}, \quad b = -\frac{1}{2a}$$

$$c = a, \quad a \in \mathbb{C}^x$$

$$g h g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} = e + f$$

$$\mathbb{D}_e \cap S = \{e + f\}$$

# Модулярные - модулярные

$U(\mathfrak{g}) + PBW$  квантуется  $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S\mathfrak{g}$

$U(\mathfrak{g})/I_\chi + PBW$  квантуется  $\mathbb{C}[V]$

$$(\mathbb{Z} - \chi(\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}U(\mathfrak{g})) = I_\chi$$

$W_e$  квантуется  $\mathbb{C}[S_e]$   
+ группа канонизации  $\mathbb{C}[S_e \cap V]$   
 $W_e/I_\chi$

Пуассонова стр. на  $\mathfrak{g}^*$  (и не только)

$F_1, F_2 \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$  и  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$

$$\{F_1, F_2\}(\zeta) = \zeta([F_1|_\zeta, F_2|_\zeta]) \quad (\star)$$

$$T_\zeta^* \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$$

если  $x, y \in \mathfrak{g} \subset S\mathfrak{g} = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ , то  $\{x, y\}(\zeta) = \zeta([x, y])$

Лемма  $(\star)$  задаёт модуль Пуассона.

Теорема Сумма. алгебра  $\mathfrak{g}^*$  это в точности  $Ad^*_G$  орбиты.

$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$  - канонично.

## Гамильтоново редукция

Пусть  $(M, \{, \})$  Пуассоново.  $G \curvearrowright M$  сохр. свободн.;  $g. \{f_1, f_2\} = \{g.f_1, g.f_2\}$

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(M)$$

$$X \mapsto X_Z$$

Опр Действие  $G \curvearrowright M$  гамильтоново, если

$$\mu^*: S\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}[M], \quad \{\mu^*(Z), f\} = df(X_Z)$$

$\nearrow$  отображ. моментов

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^* \text{ — отображ. моментов}$$

Пусть  $\mathbb{O} \subset \mathfrak{g}^*$ ,  $\mu^{-1}(\mathbb{O})$  —  $G$ -инв. в  $M$ , то

$$\mu^{-1}(\mathbb{O}) // G = \text{ам. редукция}$$

$$I_{\mathbb{O}} = \{f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \mid f|_{\mathbb{O}} = 0\} \subset S\mathfrak{g}$$

$$\mu^*(I_{\mathbb{O}}) \subset \mathbb{C}[M]$$

Опр-Преза ор-ти к  $\mu^{-1}(\mathbb{O}) // G = \left( \mathbb{C}[M] / \mu^*(I_{\mathbb{O}}) \mathbb{C}[M] \right)^G$

Теорема Если  $G$  связна, то  $\mu^{-1}(\mathbb{O}) // G$  Пуассоново.

Лемма связности  $\Rightarrow G$ -инварианты  $\leadsto \mathfrak{g}$ -инв.

$$F_1, F_2 \in \left( \mathbb{C}[M] / \mu^*(I_{\mathbb{O}}) \mathbb{C}[M] \right)^{\mathfrak{g}}, \quad \widehat{F}_1, \widehat{F}_2 \in \mathbb{C}[M]$$
$$[\widehat{F}_i] = F_i$$

$$\{F_1, F_2\} := [\{\widehat{F}_1, \widehat{F}_2\}]$$

есам  $f \in \mu^*(I_0) \mathbb{C}[u]$ , то  $\{f, h\} \in \mu^*(I_0) \mathbb{C}[u]$  <sup>↑ сходна на  $\mathcal{M}$</sup>

$$\forall h \in \mathcal{M}. [h] - \text{б. у. н.} \Rightarrow \{\mu^*(z), h\} \in \mu^*(I_0) \mathbb{C}[u]$$

$$\begin{matrix} \Downarrow \\ X_3([h]) = 0. \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ d h(X_3) = X_3(h) \end{matrix}$$

$$f = \sum_i \mu^*(z_i) a_i, \quad a_i \in \mathbb{C}[u], \quad z_i \in I_0$$

$$\begin{aligned} \{f, h\} &= \sum_i \{\mu^*(z_i) a_i, h\} = \sum_i \{\mu^*(z_i), h\} a_i + \\ &+ \sum_i \{a_i, h\} \mu^*(z_i) \\ &\quad \uparrow \mu^*(I_0) \mathbb{C}[u] \end{aligned}$$

### Пуассонова стр. на срезе Словачи

$$\sigma, (e, h, f) \Rightarrow \sigma = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \sigma(i), \quad \sigma(i) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = i x\}$$

$\sigma(-1)$ . Котли билин. форму.

$$w(x, y) = (e, [x, y])$$

Лема  $w: \sigma(-1) \times \sigma(1) \rightarrow \mathbb{C}$  невопрогедена

До

- $w(x, y) = (\text{ad } e(x), y)$

- $(\cdot, \cdot): \sigma(1) \times \sigma(-1) \rightarrow \mathbb{C}$  - невопрогедена

- $\text{ad } e: \sigma(-1) \xrightarrow{\sim} \sigma(1)$

$\ell \in \mathfrak{g}(-1)$  - какое-то лагранжианово изобр-во

$$\ell^\perp = \ell = \{x \in \mathfrak{g}(-1) \mid w(x, y) = 0 \forall y\}$$

Обозначение  $\mathfrak{m} = \ell \oplus \bigoplus_{i \leq -2} \mathfrak{g}(i)$

Наблюдение  $\mathfrak{m}$ -линейный изоморфизм в  $\mathfrak{g}$ .

Пусть  $M$  универсальная накрывающая в  $G$  с от.  $\mu$  и  $\mathfrak{m}$ .

Теорема  $S \simeq \mu^{-1}(e)/M$

$$M \simeq \mathfrak{g}^* \quad \mu: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{m}^*$$

Предп. 1)  $\mu$  - ор. функционалов. 2)  $e \in \mathfrak{m}^*$  -  $M$  инв.  $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\text{ограничение}} \mathfrak{m}^*$   
 3)  $\mu^{-1}(e) = e + \mathfrak{m}^\perp$  внутри  $\mathfrak{g}$  отн. ф-лов Киллинга  
 $\uparrow$  инвариантно.  $\uparrow$  Киллинг

До-во 1) - ок  $\checkmark$

2)  $\zeta \in \mathfrak{m}, (e, [\zeta, x]) = 0, x \in \mathfrak{m}$   
 $\nearrow$   $\text{ад}_{\zeta}(e, \cdot)$  градуировка + лагранжиановость  $\ell$

3)  $\mu^{-1}(e) = e + \mathfrak{m}^\perp$  -  $M$  инв следует из 2) и инвариантности  $\mathfrak{m}^\perp$  (т.е. Киллинг инв.)

Теорема разрезности  $\mu^{-1}(e)/M = \dim \mathcal{G} - 2 \dim M$   
 $\dim S = \dim \ker \alpha \circ f = \dim \mathcal{G}(-1) + \dim \mathcal{G}(0)$

$$\dim \mathcal{G} - 2 \dim M = \sum_i \dim \mathcal{G}(i) - \underbrace{2 \dim e}_{\dim \mathcal{G}(-1)} -$$

$$- 2 \sum_{i \leq -2} \dim \mathcal{G}(i) \quad \dim \mathcal{G}(i) = \dim \mathcal{G}(-i)$$

$$\sum_i \dim \mathcal{G}(i) = \sum_{i \geq 1} \dim \mathcal{G}(i) + \sum_{i \leq -1} \dim \mathcal{G}(i) + \dim \mathcal{G}(0)$$

$$= 2 \sum_{i \leq -1} \dim \mathcal{G}(i) + \dim \mathcal{G}(0)$$

Уточн:  $\dim \mathcal{G} - 2 \dim M = 2 \dim \mathcal{G}(-1) - \dim \mathcal{G}(-1) + \dim \mathcal{G}(0) = \dim \mathcal{G}(-1) + \dim \mathcal{G}(0)$

Теорема (Бенег-Роз)

$$M \times S \simeq e + m^\perp$$

↑ нулевой генератор

$$S \simeq \mu^{-1}(e)/M$$