

Оперы Мюрр и Картаков связности.

Напоминание: Оперы.

G - простая алг. гр.

$\cup$

$$B \xrightleftharpoons{\quad} T = \frac{B}{[B, B]}$$

(мг X , X -кривая)

(или глск $D = \text{Spec } \mathbb{C}[t, \tau]$)

Опр.: G -опер $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_B, \nabla)$ -

- это

1) $\mathcal{Y}$ - свободное G -раскл. мг X

2) $\mathcal{Y}_B \subset \mathcal{Y}$ - B -редукция

3) ∇ - связность на $\mathcal{Y}$, которая

локально в $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = X$ ($-$ тривиализ.)
 $\mathcal{Y}_B$

имеет вид $A_{\alpha} \in \Omega_{U_{\alpha}}^1 \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$:

$$\bar{A}_{\alpha} \in \Omega_{U_{\alpha}}^1 \otimes_{\mathbb{C}} \frac{[n, n]^{\perp}}{\mathfrak{b}} \subset \Omega_{U_{\alpha}}^1 \otimes_{\mathbb{C}} \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}},$$

где $\bar{A}_{\alpha}$ - образ A_{α} в $\Omega_{U_{\alpha}}^1 \otimes_{\mathbb{C}} \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{b}}$.

Пример. $G = SL_n$ $\curvearrowright V \cong \mathbb{C}^n$
 $\cup$
 B $\curvearrowright F.V$

$(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_B, \nabla)$ $\rightsquigarrow$

$$E = \mathcal{Y} \times_G V \cong \mathcal{Y}_B \times_B V.$$

$\cup$

$$F.E = \mathcal{Y}_B \times_B F.V.$$

+ известно $\nabla : E \rightarrow E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$. Т.ч.

локально

$$\nabla = d + \begin{pmatrix} * & & \\ + & \ddots & * \\ & & +* \end{pmatrix},$$

где $+ \neq 0$.

Итак имеем,

$$F_j E = \begin{pmatrix} * & & \\ * & \ddots & \\ * & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\} j$$

$$\nabla(F_j E) \rightarrow F_{j+1} E \otimes \Omega_X^1,$$

∇ индуцирует изоморфизм

$$\frac{F_j E}{F_{j-1} E} \xrightarrow{\sim} \frac{F_{j+1} E}{F_j E} \otimes \Omega_X^1.$$

Конструкция:

$$(T = \frac{B}{[B, B]})$$

$$(\gamma, \gamma_B, \nabla) \rightsquigarrow \mathcal{G}_T := \gamma_B \times_B T -$$

- универсальное T -расп. над X .

Пример $G = SL_n$: $\mathcal{V} \cong \mathbb{C}^n$.

$$\mathcal{G}_T \times_T \mathcal{V} \cong$$

$$(T < B)$$

$$\mathcal{V} \cong \bigoplus_j \frac{F_{j+1} \mathcal{V}}{F_j \mathcal{V}}$$

как T -представление

$$\textcircled{\gamma} \quad \mathcal{G}_T \times_T \bigoplus_j \frac{F_{j+1}V}{F_j V} \cong \bigoplus_j (\gamma_B \times_B T) \times_T \frac{F_{j+1}V}{F_j V} \cong$$

$$\cong \bigoplus_j \gamma_B \times_B \frac{F_{j+1}V}{F_j V} \cong \bigoplus_j \frac{F_{j+1}E}{F_j E}$$

$$\left(\begin{array}{l} E = \gamma \times_G V \cong \gamma_B \times_B V \\ V \\ F \cdot E = \gamma_B \times_B F \cdot V \end{array} \right)$$

Оперируемые: (про T-раскл.)

$\mathcal{L}$ - линейное раскл. над X . ($\mathcal{L} = \Omega_X^1$)

$\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \setminus \{ \text{нулевое сечение} \}$ - многообразие $\mathbb{C}^*$ -раскл.

$\check{\gamma}: \mathbb{C}^* \rightarrow T$ - кохарактер $\rightsquigarrow$

$$\left(\check{\gamma} = \check{\rho} = \sum_{i=1}^{\text{rk } G} \omega_i \right)$$

↑
φ-кокас.

$\rightsquigarrow \mathcal{L}^{\check{\gamma}} := \mathcal{L}^* \times_{\mathbb{C}^*, \check{\gamma}} T$ - многообразие T-раскл. над X .

Рассмотрим представление $T \cap \mathbb{C}_\mu$ с характером μ .

$$\mathcal{L}^{\check{\gamma}} \times_T \mathbb{C}_\mu \cong \mathcal{L}^{\otimes \langle \check{\gamma}, \mu \rangle}$$

$$\left. \begin{array}{l} T \cong (\mathbb{C}^*)^l \cap \mathbb{C}^{\oplus l} \\ \check{\gamma} = (\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_l) \end{array} \right\} \rightsquigarrow \mathcal{L}^{\check{\gamma}} \times_T (\mathbb{C}^{\oplus l}) \cong \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{L}^{\otimes \check{\gamma}_i}$$

Предположение: $G = G_{adj}$, Для G -оператора $(\gamma, \gamma_B, \nabla)$

$$\gamma_B \times_B T = : \mathfrak{g}_T \cong \Omega_X^{\vee}, \text{ где } \mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{rk G} \omega_i$$

Фундаментальное
кольцо.

$$\mathfrak{g}: \mathbb{C}^r \rightarrow T \subset G.$$

Доказательство:

$X = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ - тривиализует γ_B и Ω_X^1 .

$\Omega_{\alpha} \in \Omega_X^1(U_{\alpha})$ - тривиализация.

$$\nabla = A_{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{rk G} f_i \otimes \psi_i + \text{нуль} \right) \otimes \Omega_{\alpha}.$$

$\underbrace{\sum_{i=1}^{rk G} f_i \otimes \psi_i}_{\mathfrak{g} \otimes \Omega_X^1(U_{\alpha})} \quad \wedge \quad \underbrace{\text{нуль}}_{b \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}} \otimes \Omega_{\alpha}.$

$\psi_i \in \mathcal{O}_X^{\vee}(U_{\alpha})$, $f_i \in \mathfrak{g}$ - простой оператор
корень.

$$\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{rk G} (\omega_i \circ \psi_i) : U_{\alpha} \rightarrow T$$

$$\psi_i : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{C}^r, \quad \omega_i : \mathbb{C}^r \rightarrow T.$$

$$\Psi(A_{\alpha}) = \left[\sum_{i=1}^{rk G} \left(\text{Ad}_{\Psi}(f_i) \otimes \psi_i + \text{нуль} \right) \right] \otimes \Omega_{\alpha} \in$$

$$\text{Ad}_{\check{\omega}_j \circ \psi_j}(f_i) = \psi_j^{\langle f_i, \check{\omega}_j \rangle} f_i = \psi_j^{-\delta_{ij}} f_i$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{rk } G \\ \sum_{i=1}^l f_i \otimes 1 + \text{neuro} \end{array} \right) \otimes \Omega_X.$$

$\left(\tau \wedge \frac{\ln m}{b} \right)$
 свободное и
 трансверсальное на
 отрезке

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^* \quad - \quad \text{касательная } \Omega_X$$

$$\text{т.е.} \quad \Omega_X = \varphi_{\alpha\beta} \Omega_\beta \quad \text{на} \quad U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \subset X.$$

$$A_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = \left(\begin{array}{c} \text{rk } G \\ \sum_{i=1}^l f_i \otimes 1 + \text{neuro} \end{array} \right) \otimes \varphi_{\alpha\beta} \Omega_\beta =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{rk } G \\ \sum_{i=1}^l f_i \otimes \varphi_{\alpha\beta} + \text{neuro} \end{array} \right) \otimes \Omega_\beta \sim$$

$$\check{S} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^{\text{rk } G} (\omega_i \circ \varphi_{\alpha\beta})$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{rk } G \\ \sum_{i=1}^l f_i \otimes 1 + \text{neuro} \end{array} \right) \otimes \Omega_\beta$$

$$= A_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$$

$$\Rightarrow \text{касательная } \gamma_B = \left(\check{S} \circ \varphi_{\alpha\beta} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{что-то} \\ \text{из } N \end{array} \right)$$

=) Косетки $G_T = T_B \times_B T$ имеют вид $\check{S} \circ \varphi_B$.

□

Пример: $G = PGL_2$

Тут только 1 фундаментальный кокл

$$\hat{\omega} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \cong T < G.$$

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда. $\Omega_x^{\check{S}} = \Omega_x^*$

Пример: $G = SL_2$

$$G \curvearrowright V \cong \mathbb{C}^2$$

$$\begin{matrix} U \\ B \end{matrix}$$

$$0 = F_0 V < F_1 V < F_2 V = V$$

$$G \rightarrow PGL_2$$

$$U \rightarrow U$$

$$B \rightarrow B_a$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$T \rightarrow T_a$$

$$\kappa \rightarrow \mu$$

$$\mathbb{C}^* \xrightarrow{2:1} \mathbb{C}^*$$

$$E = \mathcal{Y}_G \times_G V \quad = ? \quad \left| \quad (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_B, \mathcal{Y}) - G\text{-onep} \right.$$

$$\cong \mathcal{Y}_B \times_B V.$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \mathcal{Y}^a = \mathcal{Y} \times_G \mathrm{PGL}_2 \\ \mathcal{Y}_B^a = \mathcal{Y}_B \times_B B_a \end{array} \right) - \mathrm{PGL}_2\text{-onp}$$

$$\mathcal{G}_T = \mathcal{Y}_B \times_B T$$

$$\mathcal{G}_T \times_T T_a \cong \mathcal{Y}_B \times_B T \times_T T_a \cong \mathcal{Y}_B \times_B B_a \times_{B_a} T_a \cong \mathcal{Y}_B^a \times_{B_a} T_a \cong$$

$$\cong \mathcal{G}_T^a \cong \Omega_X^{\vee}.$$

$\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathbb{C}_1$ - представлени с бром 1

$$\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_1^{\otimes 2} - \text{представлени с бром 2.}$$

$$\Omega_X^1 = \Omega_X^{\vee} \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}_1 \cong \mathcal{G}_T \times_{T_a} \mathbb{C}_1 \cong \mathcal{G}_T \times_T T_a \times_{T_a} \mathbb{C}_1 \cong$$

$$\cong \mathcal{G}_T \times_T \mathbb{C}_2 \cong \left(\mathcal{G}_T \times_T \mathbb{C}_1 \right)^{\otimes 2}, \text{ т.е.}$$

$$\left(\mathcal{G}_T \times_T \mathbb{C}_1 \right) \cong \Omega_X^{1/2}.$$

$$0 \rightarrow F_1 V \rightarrow V \rightarrow \bigvee_{F_1 V} \rightarrow 0$$

} }

$$0 \rightarrow F_1 E \rightarrow E \rightarrow \frac{E}{F_1 E} \rightarrow 0 \quad \in H^1(X, \Omega_X^1) \cong \mathbb{C}$$

$$T \curvearrowright F_1 V \oplus \bigvee_{F_1 V} - \text{беча } (1, -1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_3 E \cong \Omega_X^{1/2}, \quad \frac{E}{F_3 E} \cong \Omega_X^{-1/2}.$$

Определение:

Омультиметр: P - G -раса над X .

Задача B -редукции $P_B < P \quad (\Leftarrow)$

$\Leftrightarrow$ задача о сечении $s: X \xrightarrow{\pi} P/B$.

$$\left(P_B < P \right) \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{array}{ccc} P_{B/B} & \rightarrow & P/B \\ \downarrow \cong & \nearrow s & \\ X & & \end{array}$$

$$\left(P_B := \pi^{-1}(s(X)) < P \right) \quad \xleftarrow{\quad} \quad \begin{array}{ccc} & & \pi \searrow P \\ & & P/B \\ s: X & \rightarrow & \end{array}$$

Опр: $\alpha|G$ -опер Омультр $(\gamma, \gamma_B, \nabla, \gamma'_B)$, где

1) $(\gamma, \gamma_B, \nabla)$ - G -опер.

2) $\gamma'_B < \gamma$ - ещё одна B -редукция,
причем $\nabla \cap \gamma'_B$.

б) Опер Омультр $(\gamma, \gamma_B, \nabla, \gamma'_B)$ π -се объект,

если $\pi^* \mathcal{F}_B$ имеет общее нулевое сечение $\pi^* \mathcal{F}_B$,

т.е. $\mathcal{F}_B$ заданная сечение

$$s': X \rightarrow \mathcal{F}_B \cong \mathcal{F} \times_G \mathcal{G}_B \cong \mathcal{F}_B \times_B \mathcal{G}_B.$$

т.ч.

$$s': X \rightarrow \mathcal{F}_B \times_B \mathcal{U} \subset \mathcal{F}_B \times_B \mathcal{G}_B,$$

$$\text{где } \mathcal{U} = \mathcal{B} \circ \mathcal{B} \subset \mathcal{G}_B.$$

Пример: $G = \mathrm{SL}_n$ $\mathcal{U} \cong \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} F.E &\subset E = \mathcal{F} \times_G V \cong \mathcal{F}_B \times_B V \supset \mathcal{F}_B \times_B F.V \\ \parallel & \qquad \qquad \qquad \parallel \\ \pi^* \mathcal{F}_B \times_B F.V & \qquad \qquad \qquad F.E. \end{aligned}$$

Узнать общее нулевое сечение можно проверить
на точке $x \in X$.

$$F.E_x \subset E_x \supset F.E_x$$

↑

«стандартный флаг» (=)

$$(=) \quad \left(\mathcal{F}_B \right)_x \cong \mathcal{G}_B$$

$$\downarrow \quad \nearrow \text{задать } F.E_x$$

Считаем, что $s(x) = \{B \in G/B\}$.

Усл. обн. $\Leftrightarrow s'(x)$ имеет вид $b \cdot w_0 \cdot B \in G/B$ в точке x

В терминах флагов

$$\boxed{F_0' E_x = b \cdot w_0 \cdot F_0 E_x}$$

$$w_0 = \sum_{j=1}^n E_{n-j+1, j} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & \ddots & \\ \pm 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in S L_n$$

$$F_j E_x = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ j \end{matrix} \parallel 0$$

$$w_0 F_j E_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ j \end{matrix} \cap F_{n-j} E_x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Усл. обн.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left(\underset{\parallel F_j' E_x}{b w_0 F_j E_x \cap F_{n-j} E_x} \right) = \\ = b (w_0 F_j E_x \cap F_{n-j} E_x) = 0.$$

$$F_j E \cap F_{n-j}' E = 0 \quad \forall j. \quad (\text{rk } F_j E = \text{rk } F_j' E = j)$$

Конструкция: $(\gamma, \gamma_B, \gamma, \gamma_B')$

Построим T -регулярно $\gamma_T \subset \gamma$:

$$\gamma_B' \cdot w_0 \subset \gamma$$

$\uparrow$

B_- -регулярно.

$$B_- = w_0 B w_0$$

$$\gamma_T := \gamma_B \cap (\gamma_B' \cdot w_0) \subset \gamma$$



$$T = B \cap B_- = B \cap w_0 B w_0.$$

Утв: γ_T - минимальное T -раса, если
или
 G -опер $\checkmark$ $(\gamma, \gamma_B, \gamma, \gamma_B')$ для любого.